**Kidolgozott feladatok Markov-láncból**

1. **Feladat szövege:**

Tegyük fel, hogy a hazai gyorsétterem piacon két szereplő van: a McDonald’s, és a Burger King. Ők versenyeznek a fogyasztókért. Ha valamely személy legutóbb a McDonald’s-ban vásárolt, akkor 80% valószínűséggel legközelebb is oda fog menni, ha valaki a Burger Kingben volt, akkor 75%-os a valószínűsége, hogy a következő fogyasztása is ott lesz.

1. Adja meg az átmenetvalószínűségmátrixot!
2. Egy adott személy éppen a McDonald’s-ban vásárol, mennyi a valószínűsége, hogy a mostantól számított második vásárlása a Burger Kingben lesz?
3. Egy adott személy éppen a Burger Kingben vásárol, mennyi a valószínűsége, hogy a mostantól számított harmadik vásárlása is a Burger Kingben lesz?

**Megoldás szövege:**

1. Az adottszemély gyorsétterem választását Markov-láncnak tekintjük, amelynek állapottere az éppen választott gyorsétterem márkája.

Az állapottér két elemből áll:

1.állapot= az adott személy legutóbb a McDonald’s-ot választotta.

2.állapot= az adott személy legutóbb a Burger Kinget választotta.

A átmenetvalószínűségmátrix i-edik sorának j-edik eleme annak a valószínűsége, hogy a rendszer az i állapotból a következő lépésben a j állapotba kerül. A feladat szövege alapján felírhatjuk a mátrixot.

1. Annak a val.-e, hogy a rendszer n lépés után az i állapotból a j állapotba kerül, a  mátrix i-edik sorának j-edik eleme. Tehát most  első sorának második eleme kell.

Tehát a keresett valószínűség: 0,31

1. Az előző feladat alapján most második sorának második eleme kell.

Tehát a keresett valószínűség: 0,536875

1. **Feladat szövege:**

Járványhelyzet miatt mindkét étteremlánc zárva tart két hónapig. Az újranyitáskor a fogyasztók véletlenszerűen választják ki, hogy melyik gyorsétterembe mennek.

1. Mi lesz a megoszlás azok között a fogyasztók között, akik az újranyitás után harmadszor mennek gyorsétterembe?
2. Mi lesz a megoszlás azok között a fogyasztók között, akik az újranyitás után kilencedik alkalommal mennek gyorsétterembe? És akik tizenhetedik, alkalommal mennek gyorsétterembe? Van-e valamilyen megérzésünk ezzel kapcsolatban?

**Megoldás szövege:**

1. Jelölje annak a valószínűségét, hogy a 0 időpontban a lánc az i állapotban van.

a  vektort kezdeti valószínűségeloszlásnak nevezzük. A feladat szövege szerint az újranyitás után azonos valószínűséggel választják a két étteremláncot, tehát .

Ha n átmenet történik, akkor az állapotok eloszlását a  vektor adja. Akik újranyitás után harmadik alkalommal mennek, azoknál két átmenet történik.

.

1. Azoknál, akik kilencedik alkalommal mennek, a megoszlást  vektor adja. ( mátrixot számolhatjuk úgy, hogy második hatványát szorozzuk önmagával, így megkapjuk negyedik hatványát. Ha ezt is szorozzuk önmagával, akkor kapjuk nyolcadik hatványát.)

Akik 17-edik alkalommal mennek:

Az utolsó két eloszlás már szinte megegyezik. Érzi az ember, hogy ez nem a véletlen műve, hanem az eloszlásnak van határértéke, ha értéke tart a végtelen felé. Ezt nevezzük majd egyensúlyi (stacionér) eloszlásnak. A negyedik feladatban adjuk meg a pontos értékeket.

1. **Feladat szövege:**

Bizonyítsa be, hogy az első feladatban megadott Markov-lánc ergodikus!

**Megoldás szövege:**

Egy lánc akkor ergodikus, ha minden állapot visszatérő, aperiodikus, és az állapotok kommunikálnak egymással. Most mindhárom tulajdonság könnyen ellenőrizhető:

* 1-2-1 és 2-1-2 útvonalak miatt visszatérő mindkét állapot
* Egy állapot akkor aperiodikus, ha nem periodikus. Az állapot periodikus periódussal, ha az a legkisebb szám, hogy az -ből kilépő lánc visszatérési idejének hossza a egészszámú többszöröse. Ebben a példában bármely állapot átmehet önmagába, így nem lehet periódikus.
* Az és állapotok kommunikálnak, ha elérhető -ből, és fordítva. Ez az 1-2-1 útvonalból látszik.

1. **Feladat szövege:**

Létezik-e az egyes feladatban egyensúlyi eloszlás? Ha igen, akkor adja meg!

**Megoldás szövege:**

Ha egy lánc ergodikus, akkor létezik egyensúlyi eloszlása. Az előző feladatban láttuk, hogy a lánc ergodikus, így van egyensúlyi eloszlás:

A számok mutatják meg, hogy hosszútávon milyen valószínűséggel tartózkodik a rendszer az -edik állapotban. Az eloszlásban szereplő valószínűségek meghatározásához a és összefüggésekből álló egyenletrendszert kell megoldanunk. Most részletesen:

Az egyenletrendszer első két egyenlete ugyanarra vezet: . Ez általában is igaz lesz, a összefüggésből kapott egyenletek közül az egyiket elhagyhatjuk, mert következik a többiből.

ezt behelyettesítve az utolsó egyenletbe:

Tehát Tehát hosszútávon vizsgálva a gyorsétterembe járók 55,6%-a McDonaldsba jár, 44,4%-a Burger Kingbe.

1. **Feladat szövege:**

Tegyük fel, hogy Magyarországon a gyorsétterembe járok tábora 1 millió fő, akik mind heti kétszer járnak gyorsétterembe. Egy alkalommal 3000 forintért fogyasztanak, a gyorsétterem egy fogyasztásra jutó költsége 2000 forint. Évi 1 milliárd forintért egy reklámcég garantálná a McDonald’s-nak, hogy 20%-ról 10%-ra csökkenti azoknak a fogyasztóknak az arányát, akik McDonald’s után Burger Kingbe mennek. Érdemes-e a McDonald’s-nak szerződést kötnie a reklámcéggel?

**Megoldás szövege:**

Számoljuk ki, hogy a reklámcég bevonásával hogyan alakul át az egyensúlyi eloszlás. Az átmenetvalószínűségmátrix első sora fog megváltozni, 90% fog maradni a McDonaldsnál, és 10% fog váltani Burger Kingre.

Innen az egyenletrendszer:

Ezt az előzőhöz hasonló módon oldhatjuk meg.

Tehát 55,6%-ról 71,4%-ra nőne a McDonald’s-ba járók száma, azaz az 1 millió gyorsétterembe járó 15,8%-val vagyis 158000-rel.

Ez forint, ami több, mint 16 milliárd forint, tehát megéri alkalmazni a céget.

1. **Feladat szövege:**

Számítsa ki és értelmezze az átlagos elérési időket az első feladatban!

**Megoldás szövege:**

Egy ergodikus lánc esetén jelölje az állapotból induló, állapotba érkező utakon a minimálisan szükséges lépések átlagos számát. Az értéket átlagos elérési időnek nevezzük. Belátható, hogy , és

Tehát Jelentése: Ha egy személy McDonald’s-ban étkezik, akkor várhatóan 1,8 alkalom múlva fog megint McDonald’s-ba menni.

Tehát Jelentése: Ha egy személy Burger Kingben étkezik, akkor várhatóan 2,25 alkalom múlva fog megint Burger Kingbe menni.

, azaz Burger King után várhatóan a negyedik alkalomnál megy először valaki McDonald’s-ba.

azaz McDonald’s után várhatóan az ötödik alkalomnál megy először valaki Burger Kingbe.

1. **Feladat szövege:**

(Winston) Tekintsük a következő szabályokkal leírható készletezési rendszert: (1) A periódus elején megfigyeljük a készletszintet. Az aktuális készletszintet jelölje . (2) Ha , akkor egységet rendelünk. Ha , akkor 0 darabot rendelünk. Tegyük fel, hogy a megrendelt egységek azonnal leszállításra kerülnek. (3) Tegyük fel, hogy valószínűséggel a periódus alatt a kereslet 0 lesz;

valószínűséggel a kereslet 1 egység lesz, és valószínűséggel a periódus alatti kereslet 2 egység lesz. (4) A következő periódus elején ismételten vizsgáljuk meg a készletszintet.

A rendszer állapotát definiáljuk a periódus elején megfigyelt készletszinttel. Határozzuk meg a modellben megadott Markov-lánc átmenetvalószínűség mátrixát!

**Megoldás szövege:**

Minden periódus elején a készletszint lehet 0, 1, 2, 3, vagy 4. Ezek lesznek a Markov-lánc lehetséges állapotai.

Ha a periódus elején a készletszint , akkor egységet rendelünk, azaz 4 egységnyi készletről indulunk, és így a periódus végére a készletszint valószínűséggel 4 lesz, valószínűséggel 3 lesz, valószínűséggel 2 lesz.

Ha a periódus elején a készletszint , akkor egységet rendelünk, azaz 4 egységnyi készletről indulunk, és így a periódus végére a készletszint valószínűséggel 4 lesz, valószínűséggel 3 lesz, valószínűséggel 2 lesz.

Ha a periódus elején a készletszint , akkor nem rendelünk, azaz 2 egységnyi készletről indulunk, és így a periódus végére a készletszint valószínűséggel 2 lesz, valószínűséggel 1 lesz, valószínűséggel 0 lesz.

Ha a periódus elején a készletszint , akkor nem rendelünk, azaz 3 egységnyi készletről indulunk, és így a periódus végére a készletszint valószínűséggel 3 lesz, valószínűséggel 2 lesz, valószínűséggel 1 lesz.

Ha a periódus elején a készletszint , akkor nem rendelünk, azaz 4 egységnyi készletről indulunk, és így a periódus végére a készletszint valószínűséggel 4 lesz, valószínűséggel 3 lesz, valószínűséggel 2 lesz.

A átmenetvalószínűség mátrix i-edik sorának j-edik eleme azt mutatja, hogy mennyi a valószínűsége, hogy az i-edik állapot után a j-edik állapot következik.

1. **feladat szövege:**

Tegyük fel, hogy az előző feladatban egy adott periódus elején a készletszint 3. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az adott periódustól számított második periódus elején a készletszint 4 lesz?

**megoldás szövege:**

Annak a valószínűsége, hogy a rendszer lépés alatt az -edik

állapotból a -edik állapotba kerül a mátrix -edik sorának a -edik eleme. Tehát most a mátrix negyedik sorának az ötödik elemére van szükségünk.

Tehát a keresett valószínűség:

1. **feladat szövege:**

Tegyük fel, hogy a időpontban az egyes készletszintek valószínűsége a következő:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| készletszint | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| valószínűség | 0.3 | 0 | 0.4 | 0.2 | 0.1 |

(Erre ezentúl a következő rövidebb jelölést használjuk:

, ez lesz ennek a Markov-láncnak a kezdeti eloszlása)

Adja meg a két lépéssel későbbi valószínűségeloszlást! Mennyi a valószínűsége, hogy 2 lépés után a készletszint 1 lesz?

**Megoldás szövege:**

Az -edik lépés után a valószínűségeloszlást a vektor adja:

most vektor adjaa második lépés utáni valószínűségeloszlást. Innen könnyen leolvashatjuk, hogy két lépés után annak a valószínűsége, hogy a készletszint 1 lesz: (A második állapot, hogy a készletszint 1)

1. **Feladat szövege:**

Bizonyítsa be, hogy az első feladatban megadott lánc ergodikus! Adja meg az egyensúlyi eloszlást!

**Megoldás szövege:**

Egy lánc akkor ergodikus, ha minden állapot visszatérő, aperiodikus, és az állapotok kommunikálnak egymással. Például a 0 készletszint visszatérő: 0 után a készletszint lehet 2, utána megint 0. A többi hasonlóan ellenőrizhető. (0-3-2-0, 0-4-2-0). Az 1 készletszint is visszatérő: 1-2-1, 1-3-2-1, 1-4-2-1, és így lehetne tovább ellenőrizni.

Egy állapot akkor aperiodikus, ha nem periodikus. Az állapot periodikus periódussal, ha az a legkisebb szám, hogy az -ből kilépő lánc visszatérési idejének hossza a egészszámú többszöröse. A készletszint nem lehet periodikus, mert 1 lépésben visszatérhetnek önmagukba. A készletszint azért nem lehet periodikus, mert van 2 és 3 lépésből álló visszatérő út is (0-2-0,0-3-2-0, 1-2-1, 1-3-2-1), és a periódus osztója a visszatérő utak hosszának.

Az és állapotok kommunikálnak, ha elérhető -ből, és fordítva. A táblázatban vannak a lehetséges útvonalak:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0;1 | 0;2 | 0;3 | 0;4 | 1;2 | 1;3 | 1;4 | 2;3 | 2;4 | 3;4 |
| 0-2-1-2-0 | 0-2-0 | 0-3-2-0 | 0-4-2-0 | 1-2-1 | 1-3-1 | 1-4-2-1 | 2-0-3-2 | 2-0-4-2 | 3-1-4-3 |

1. **Feladat szövege:**

Létezik-e a 7)-es feladatban megadott láncnak egyensúlyi eloszlása? Ha igen, akkor adja meg! Melyik a leggyakrabban előforduló készletszint? Mennyi az átlagos készletszint?

**Megoldás szövege:**

Ergodikus láncnak mindig létezik egyensúlyi eloszlása. Az előző feladatban láttuk, hogy a lánc ergodikus, így van egyensúlyi eloszlás:

A számok mutatják meg, hogy hosszútávon milyen valószínűséggel tartózkodik a rendszer az -edik állapotban. Az eloszlásban szereplő valószínűségek meghatározásához a és összefüggésekből álló egyenletrendszert kell megoldanunk. Most részletesen:

A 4)-es feladatnál elmondottak alapján például a harmadik egyenletet elhagyhatjuk. Az egyenletrendszert megoldva azt kapjuk, hogy

Tehát az egyes készletszintekhez tartozó egyensúlyi valószínűségek:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| készletszint | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| valószínűség | 1/9 | 5/27 | 1/3 | 2/9 | 4/27 |

Legnagyobb valószínűséggel a készletszint fordul elő. Az átlagos készletszint:

1. **Feladat szövege:**

Hárman leülnek kártyázni, fejenként 1000, 2000, 3000 forinttal. Minden körben 1000 ft tétet kell betenni (akinek még van pénze), és a kör győztese nyeri a betett téteket. Mindenki addig játszik, amíg van nála pénz, tehát addig játszanak, amíg valaki el nem nyeri az összes játékos pénzét. Ha a játékot Markov-lánccal írjuk le, akkor mennyi az álapottér elemszáma, hány elnyelő állapota van a folyamatnak?

**Megoldás szövege:**

A lehetséges állapotokat egy három elemű vektorral lehet leírni, amelynek elemei a három játékos ezreseinek száma fejenként, így a kiinduló állapot: . Ha az első kört a második játékos nyeri, akkor vektort kapjuk. Könnyű átgondolni, hogy bármely állapotban a komponensek összege 6, és minden olyan vektor ahol a komponensek összege 6 egy lehetséges állapot. Tehát az a kérdés, hogy hány olyan három (természetes szám) komponensű vektor van, ahol a komponensek öszege 6. Ha az első komponens 0, akkor a másik két komponens 7 féle lehet. (06, 15, 24, 33, 42, 51, 60). Ha az első komponens 1, akkor a másik két komponens 6 féle lehet, és így tovább. A lehetséges állapotok száma: 7+6+5+4+3+2+1=28.

Egy állapot akkor elnyelő, ha onnan már nem lehet kilépni, tehát az az állapot már nem fog változni. Ilyen állapot akkor van, ha valaki elnyeri a többiek pénzét.

A három elnyelő állapot: ; ;